

Probabilità e paradosso

Germano D'Abramo¹ e Barbara D'Abramo²

Istituto di Astrofisica Spaziale e Fisica Cosmica,
Roma, Italy

E-mail: dabramo@rm.iasf.cnr.it

²Liceo Scientifico “Leonardo Da Vinci”,
Fermo, Ascoli Piceno, Italy

E-mail: baxina@libero.it

24 Giugno 2004

1 Introduzione

Come ognuno di voi ha avuto modo di sperimentare di persona, contare manualmente una grande quantità di oggetti è un'operazione faticosa e per nulla esente da errori. La possibilità di sbagliare è sempre in agguato e la probabilità di compiere un errore è significativamente non nulla per gruppi di oggetti piuttosto numerosi. Nella sezione **2** di questo breve articolo, giocando con le elementari regole del calcolo delle probabilità, mostriamo alcune sorprendenti e contro-intuitive caratteristiche del processo di conteggio manuale. Infine, poniamo all'attenzione del lettore una *rara* forma di inconoscibilità classica (cioè non quantistica), che ha qualcosa a che vedere con la persecuzione della Sfortuna.

Nella sezione **3**, invece, cerchiamo di dare una caratterizzazione *statistica* del concetto di individuo ‘grande’ o ‘geniale’. Cioè, quale dovrebbe essere il numero medio di individui ‘grandi’, rispetto al numero medio che si otterrebbe nell'ipotesi che i grandi risultati si verificano *casualmente*, affinché si possa parlare effettivamente di ‘genio’ o contributo ‘geniale’? Questa lettura del concetto di genialità, in stretta relazione con la nozione comune che si ha

di esso, sembra produrre una sorta di paradosso, che potrebbe essere definito come il ‘paradosso del genio’.

Nella sezione 4, infine, descriviamo una semplice società ideale nella quale viene messa a votazione democratica una perversa riforma degli stipendi. Si vede, in questo caso, come la decisione più razionale da prendere nell’esprimere il proprio voto democratico porti inevitabilmente ad una conclusione perversa.

2 Contare quante volte?

Al compimento del quindicesimo anno, Sara ottiene dai suoi genitori il permesso di rompere il maialino salvadanaio, da qualche tempo sofferente di una forma (fatale) di costipazione da Euro.

Una volta compiuta l’inevitabile eutanasia, Sara tenta di contare il suo cospicuo gruzzoletto, tutto costituito da monete di 1 Euro. Le conviene contarlo una sola volta e fidarsi della cifra ottenuta o contarlo una seconda volta per essere sicura del valore appena calcolato? La risposta che viene spontanea un pò a tutti è la seconda, soprattutto se nel conteggio si è avuta l’impressione di essersi distratti. Tuttavia, vedremo ora che dietro questa scelta si nasconde una piccola sorpresa.

Supponiamo per semplicità che la probabilità che Sara ha di sbagliare un conteggio sia p e che sia sempre la stessa per tutti i conteggi consecutivi che decide di fare. Quindi, se Sara effettua un solo conteggio e poi decide di fidarsi del risultato, la probabilità di aver sbagliato è banalmente $P_{err1} = p$.

Se invece decidesse di ripetere una seconda volta il conteggio del suo denaro, quale sarebbe la probabilità di aver sbagliato il risultato finale *almeno una volta*? È sufficiente un rapido calcolo per convincersi che è $P_{err2} = 1 - (1 - p)^2$, infatti P_{err2} è uguale a 1 meno la probabilità di *non* sbagliare in nessuno dei due conteggi, cioè $(1 - p) \cdot (1 - p)$.

Table 1: Probabilità di errore nei due casi:

| | |
|--------------|----------------------------|
| Un conteggio | $P_{err1} = p$ |
| Due conteggi | $P_{err2} = 1 - (1 - p)^2$ |

Poiché P_{err2} è sempre maggiore o uguale a P_{err1} , e $P_{err2} = P_{err1}$ solo con

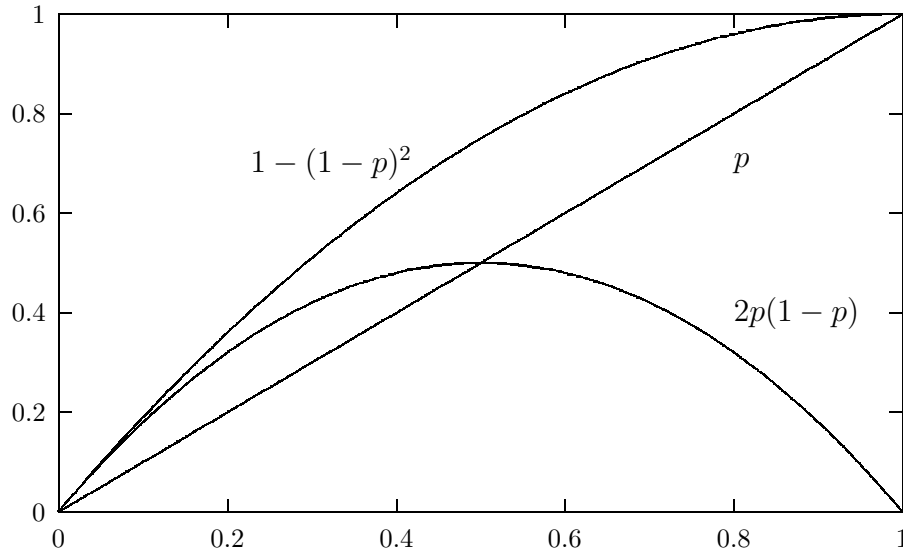


Figure 1: Rappresentazione grafica delle probabilità descritte nel testo.

$p = 0$ o 1 (vedi fig. 1), se Sara conta due volte i suoi soldi ha una probabilità di sbagliare¹ che è maggiore della probabilità di sbagliare il valore della cifra totale se li contasse una sola volta!

Nel caso in cui Sara ottenga due valori identici nelle due successive operazioni, la probabilità di aver sbagliato in entrambi i casi è p^2 , mentre la probabilità di avere in mano i due valori corretti è $(1 - p)^2$. Ovviamente Sara non può sapere con certezza in quale delle due situazioni si trova.

Se invece nelle due operazioni ottiene due valori diversi, sicuramente almeno uno di questi è sbagliato. Ad esempio, la probabilità che in due conteggi Sara ottenga un valore corretto e uno sbagliato è $2p(1 - p)$. E questa è maggiore di p se $p < \frac{1}{2}$ (vedi fig. 1). Il che significa che più è piccola la probabilità che Sara ha di sbagliare, con più probabilità si deve preparare a contare i suoi soldi una terza volta.

In sostanza, se $p < \frac{1}{2}$ e Sara decide di contare i suoi soldi due volte, allora si dovrà preparare a contarli una terza volta con una probabilità maggiore rispetto a quella di sbagliare il conteggio se li contasse una volta sola!

¹Cioè di sbagliare almeno una volta, ma se ottiene due valori diversi, magari uno corretto e l'altro sbagliato o anche entrambi sbagliati, Sara non può decidere subito quale sia quello corretto e si trova costretta a contare almeno una terza volta.

La figura 1 riassume graficamente quanto è stato esposto sino ad ora. Va comunque fatto notare che la curva che dà la probabilità di ottenere due valori diversi in due conteggi successivi segue un andamento diverso da quello indicato dalla funzione $2p(1-p)$, soprattutto per $p > \frac{1}{2}$. Infatti, la funzione $2p(1-p)$ non ci dà *tutta* la probabilità di ottenere due valori diversi in due conteggi successivi, ma solo la probabilità di ottenere un valore corretto e un valore sbagliato. Se p comincia ad essere significativamente grande (cioè vicina ad 1), la probabilità $2p(1-p)$ va a zero, ma non va certo a zero la probabilità di ottenere due valori diversi, entrambi sbagliati. Quindi bisogna aspettarsi che la probabilità di dover contare i soldi una terza volta non vada a zero per p che va a 1 (al contrario, essa tende sicuramente ad 1) e, inoltre, che essa sia maggiore di p anche per valori più grandi di $p = \frac{1}{2}$. Tuttavia, fornire una stima di quest'ultima probabilità risulta essere un'impresa non da poco, visto che bisogna conoscere la forma esplicita di p in funzione del numero totale da contare e dall'entità dell'errore commesso (differenza fra il valore risultante dal conteggio e il valore esatto).

2.1 Digressione filosofica

Dati M e N , cioè il numero di oggetti da contare e il numero di volte che vengono contati, $p(\Delta_i)$ è definita come la probabilità di ottenere in un singolo conteggio un valore E che differisce da M della quantità Δ_i , dove $\Delta_i = E - M$. L'intervallo di valori (interi) che Δ_i può coprire è $[\Delta_{min}; \Delta_{max}]$, con Δ_{min} e Δ_{max} dipendenti in qualche modo anche da M (cioè se M è molto grande è più probabile commettere un errore maggiore; nel contare più oggetti è plausibilmente più difficile mantenere una certa concentrazione). Notare che in linea di principio Δ_{min} è un numero intero negativo e Δ_{max} positivo. Quindi abbiamo che $p(0) = 1-p$, dove p è la probabilità di sbagliare introdotta nel paragrafo precedente.

Ora, per ogni N e M esiste una probabilità non nulla P_{un} che una persona che conta N volte M oggetti simili (monete, righe in una lista di persone, schede elettorali in un'urna...) non sia in grado di decidere quanti siano con precisione. E quindi potrà esistere sempre qualcuno o un'occasione in cui ognuno, per quante volte conti questi oggetti, non sarà mai capace di dire con sicurezza quanti sono realmente. Questo perché chi conta non ottiene sempre lo stesso numero e i diversi valori ottenuti (sia corretti che sbagliati) compaiono in gruppi circa ugualmente numerosi. Non si è quindi in grado di decidere.

Tenendo conto di tutte le possibili combinazioni, P_{un} assume la seguente forma generale

$$P_{un} = \sum_{l \geq 2, k_i \simeq k_j}^{\Delta_{max} - \Delta_{min} + 1} \frac{N!}{\prod_{i=1}^l k_i!} \sum_{\Delta_{max} \geq \Delta_l > \Delta_{l-1} > \dots > \Delta_3 > \Delta_2 \geq \Delta_{min}} \prod_{i=1}^l p^{k_i}(\Delta_i), \quad (1)$$

con $\sum_{i=1}^l k_i = N$, dove $\Delta_{max} - \Delta_{min} + 1$ è il numero totale di valori diversi che possono essere ottenuti in un singolo conteggio (quindi è incluso anche il caso in cui il valore ottenuto è quello giusto, ovvero $\Delta_i = 0$) e la prima sommatoria è eseguita in maniera tale che in N conteggi consecutivi i diversi valori ottenuti compaiano in numero circa uguale, $k_i \simeq k_j$.

La seconda sommatoria è eseguita per *tutti* i valori di Δ_l che soddisfano la condizione $\Delta_{max} \geq \Delta_l > \Delta_{l-1} > \dots > \Delta_3 > \Delta_2 \geq \Delta_{min}$.

Anche qui, per ottenere una stima di P_{un} bisognerebbe conoscere $p(\Delta_i)$ e, come abbiamo già detto prima, non è un'impresa semplice.

Comunque, per ogni N esisterà un'occasione, per quanto improbabile, in cui la quantità da contare risulta inconoscibile all'essere umano che tenta di contarla. Inoltre, un M molto grande limita spesso la possibilità fisica di ripetere un conteggio e quindi impone un valore molto piccolo per N : questo presumibilmente rende significativa la probabilità P_{un} .

In più, sarebbe interessante sapere se esistono M e N tali che, anche per $p(\Delta_i) \simeq 0$, la probabilità P_{un} risulta essere significativamente maggiore di zero.

3 Il paradosso del genio

Si racconta² che un giorno, durante le fasi del Progetto Manhattan (la costruzione della bomba atomica), Enrico Fermi chiese al Generale Robert Groves, capo del progetto, quale fosse la definizione di 'grande' generale. Groves rispose che ogni generale che avesse vinto cinque battaglie consecutive poteva definirsi a buon diritto 'grande'. Fermi allora chiese quanti fossero i grandi generali della storia e Groves rispose che ce n'erano circa tre ogni cento.

Fermi, facendo la semplicistica assunzione che nella maggior parte delle battaglie le forze in campo tra le parti si equivalessero, assegnò alla probabilità di vincere una battaglia il valore di $1/2$, cioè il 50%, e calcolò che la

²Si veda, ad esempio, W.E. Deming, "Out of the crisis" (MIT, Cambridge, 1986).

probabilità di vincere cinque battaglie consecutive³ era pari a $(1/2)^5 = 1/32$, cioè circa 3/100. “Quindi ha ragione Generale” replicò Fermi “circa tre ogni cento. Probabilità matematica, non genio”.

L’aneddoto appena descritto non può non impressionare, visto che il numero di ‘grandi’ generali nella storia, secondo l’argomento di Fermi, sarebbe lo stesso anche se si decidesse la vittoria delle battaglie lanciando una moneta, piuttosto che combattendo!

Tuttavia, ciò finisce per suscitare una ulteriore riflessione. Se 3 su 100 è anche la probabilità matematica nell’ipotesi di vittoria *casuale*, quale avrebbe dovuto essere il valore della frazione di ‘grandi’ generali nella storia affinché si fosse potuto parlare di esistenza del ‘genio’?

La frequenza reale di ‘grandi’ generali nella storia non può essere inferiore a quella che si avrebbe per puro caso (1/32 appunto, o $\sim 3/100$). E questo è ovvio poiché il puro caso rappresenta una sorta di limite inferiore; se i generali stessero con le mani in mano e non si sforzassero di vincere, il risultato sarebbe comunque di 1/32. Allora, l’unica possibilità che questa frequenza ha di essere diversa dal valore casuale è che sia superiore ad esso. Ma quanto maggiore? Più grande è e meglio è?

E qui si pone un’altro dilemma: maggiore è la frazione di ‘grandi’ generali fra tutti i generali, minore è il valore del termine ‘grande’, perché in qualche senso risulta più facile essere ‘grande’. Ma allora che significa essere ‘grande’, essere un ‘genio’ dopo queste premesse?

Più in generale, supponiamo che sia possibile associare una probabilità *a priori*, p , ad un evento ‘fuori dal comune’ (ad esempio, vittoria di 10 battaglie consecutive o di 2 premi Nobel da parte di uno stesso individuo, scoperta di 2 teorie fondamentali della fisica in campi diversi, etc.) partendo dall’ipotesi nulla, cioè che tutto avvenga per caso, e opportunamente elaborata, dal punto di vista matematico, per tenere conto della complessità del problema specifico⁴. Allora la frequenza media di esseri umani ‘grandi’ o ‘geni’ è $f_0 = Np$, dove N è il numero che tiene conto di tutti gli esseri umani vissuti in certo periodo storico. Ovviamente, f_0 è la frequenza nell’ipotesi casuale.

Ora, la frequenza reale di tali individui nella storia, f_a , non può essere inferiore a f_0 , per lo stesso motivo spiegato più sopra. Inoltre, se $f_a = f_0$ si può dire anche qui, con Fermi, che si tratta di probabilità matematica, non

³Che è anche la probabilità di ottenere 5 teste o 5 croci consecutive in 5 lanci di una moneta non viziata.

⁴Il fatto che poi sia spesso praticamente impossibile calcolare p non cambia il punto del nostro discorso.

di genio.

Allora, viste le premesse, affinché si possa parlare di ‘genio’ deve essere necessariamente che $f_a > f_0$, cioè la frequenza reale di persone che hanno raggiunto dei risultati eccezionali deve essere strettamente maggiore di quella nell’ipotesi casuale. Ma ‘maggiore’ è un concetto vago. Più grande è e meglio è?

Anche in questo caso, maggiore è f_a , maggiore risulta essere la frazione di persone ‘grandi’ o ‘geni’ nella popolazione totale considerata e quindi minore risulta essere il ‘valore’ della loro grandezza, appunto perché più comune in un senso preciso. Si può applicare qui una sorta di Teoria dell’Utilità Marginale della ‘grandezza’ o ‘genialità’. Nel campo dell’Economia la Teoria dell’Utilità Marginale afferma che l’utilità di una porzione aggiuntiva di bene materiale è legata alla quantità totale di tale bene già disponibile: maggiore è tale quantità, minore è l’utilità marginale della porzione aggiuntiva.

Potremmo dire, alternativamente, che se a raggiungere un risultato di eccellenza fosse una frazione f_{a_2} di persone minore di f_{a_1} , noi percepiremmo il raggiungimento di tale risultato come più eccezionale; ma questo processo potrebbe procedere a cascata fino al suo limite inferiore, f_0 appunto, cioè $f_{a_1} > f_{a_2} > \dots > f_{a_n} = f_0$. Ci troviamo quindi di fronte ad un paradosso.

Si sarebbe tentati di dire che l’idea comune di ‘genio’, cioè di spirito libero e creatore, novello Prometeo, che sfida la Natura e si contrappone ad essa, sia in realtà uno di quei concetti vaghi creati dall’uomo e che non abbia nessun riscontro oggettivo nella realtà. Tenendo conto di quanto è stato delineato qui, sembra piuttosto che il ‘genio’ sia l’essere umano che ha avuto l’occasione di trovarsi a vivere in determinate circostanze e una determinata vita e questa possibilità è già meccanicamente prevista dalle leggi del caso: anche i ‘geni’ non sfuggono ad esso.

4 Democrazia della privazione

Consideriamo un semplice modello di società costituita da $2N$ cittadini. Supponiamo inoltre che questi $2N$ cittadini percepiscano uno stipendio identico, pari a s Euro.

Ora, cosa succederebbe se si mettesse al voto democratico⁵ la seguente riforma? Il testo della riforma recita:

⁵Cioè, ricordiamo, tale che una qualsiasi riforma venga approvata se raggiunge almeno il 50% + 1 dei voti.

- una quantità di denaro pari a m viene tolta dallo stipendio di $N - k$ persone, con $k \geq 1$,
- allo stipendio delle restanti $N + k$ persone viene aggiunta una quantità di denaro pari a

$$\frac{(N - k)m}{N + k},$$

cioè il denaro tolto ai $N - k$ cittadini viene equamente ridistribuito tra i restanti $N + k$ cittadini.

Ora, poiché $N + k \geq N + 1$, l'eventuale voto positivo del gruppo dei $N + k$ cittadini corrisponde ad almeno il 50% + 1 dei voti e la riforma è destinata a passare con certezza, nuocendo inevitabilmente alle altre $N - k$ persone. Inoltre, se tu elettore non sai di quale gruppo andrai a far parte, i fortunati $N + k$ o gli sfortunati $N - k$, e se si può ragionevolmente assumere che la selezione di questi due gruppi sarà casuale (o, almeno, si hanno motivi per ritenere che non ci siano condizioni che favoriscano la tua immissione in una categoria piuttosto che in un'altra) allora ti conviene votare *favorevolmente*, poiché la tua probabilità di essere tra gli $N + k$ fortunati è

$$\frac{N + k}{2N} = 0.5 + \frac{k}{2N} > 0.5,$$

cioè maggiore del 50%.

Per inciso, se questa modifica casuale di stipendio fosse un gioco a cui si può scegliere di partecipare, questo sarebbe un gioco a guadagno zero. In un gioco in cui si può vincere o perdere una somma di denaro secondo una certa probabilità, il guadagno G è definito come la somma della probabilità di vincere moltiplicata per la somma vinta e della probabilità di perdere moltiplicata per la somma persa (la somma persa deve comparire con un segno meno). È in sostanza una media del guadagno. Per chi partecipa al gioco come cliente, esempi tipici di giochi a guadagno negativo sono: il lotto, il superenalotto e i giochi da Casinò in genere (in questi casi il guadagno medio è positivo per i gestori dei giochi). Nel nostro caso, il guadagno medio di ogni persona è così calcolato

$$G = \underbrace{\frac{N + k}{2N}}_{P_{\text{vittoria}}} \underbrace{\frac{(N - k)m}{N + k}}_{\text{Somma vinta}} + \underbrace{\frac{N - k}{2N}}_{P_{\text{sconfitta}}} \underbrace{(-m)}_{\text{Somma persa}} = 0,$$

e quindi rientra in quel gruppo di scommesse che la Teoria dei Giochi definisce *fair*, cioè oneste.

Per concludere, nell'ultima sezione si è voluto descrivere brevemente questo esempio ideale per mostrare come possa esistere una linea razionale e democratica di comportamento che ci favorisca a discapito degli altri. Chi vota favorevolmente sapendo di essere fra i fortunati $N+k$ cittadini esprime democraticamente il suo parere e non prevarica nessuno. In più, abbiamo anche visto che se tu non sapessi di essere fra gli $N+k$ o fra gli $N-k$, razionalmente ti converrebbe comunque votare in maniera favorevole alla riforma.

Questo è un classico esempio (ed anche il più banale) di come ciò che è perfettamente razionale per il singolo, ed è complessivamente democratico, può essere nocivo per una porzione consistente della collettività. E va da se che per impedire che si verifichino situazioni del genere, nelle quali un comportamento razionale e democratico porta paradossalmente a nuocere a molti altri, bisogna essere attenti a non proporre riforme di questo tipo, o comunque a cercare di mantenere una visione globale del problema.

* * *

Gli autori ringraziano Fulvio De Cicco per aver letto una prima bozza dell'articolo ed aver contribuito criticamente al suo miglioramento.